Wilhelm Kempf

Forschungsmethoden der Psychologie

Zwischen naturwissenschaftlichem Experiment und sozialwissenschaftlicher Hermeneutik

Band II: Quantität und Qualität

Formelsammlung

1. Textinterpretation und Inhaltsanalyse

1.4.5 Quantitative Inhaltsanalyse

[1.4.5.1]	$P_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{m-1} n_{ii}$	Beobachteter Anteil der konkordanten Kodierungen
[1.4.5.2]	$P_e = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{m-1} e_{ii}$	Zufällig erwarteter Anteil der konkordanten Kodierungen
[1.4.5.3]	$e_{ij} = \frac{n_{io}\, n_{oj}}{n}$	Erwartete Häufigkeiten
[1.4.5.4]	$\kappa = \frac{P_0 - P_e}{1 - P_e}$	Koeffizient κ

2. Psychometrie

2.1 Grundlagen

2.1.1 Die Anfänge der Testpsychologie

[2.1.1.1]	$IQ = 100 * IA / LA$	Intelligenzquotient

2.1.2 Die Fragestellungen der Testtheorie

[2.1.2.1]	$x_{vo} = \sum_{i=1}^{k} x_{vi}$	Summenscore
[2.1.2.2]	$x_{v\bullet} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{vi}$	Gewichteter Summenscore
[2.1.2.3]	$x_v = (x_{v1}, \ldots, x_{vk})$	Antwortvektor

[2.1.2.4]	$X = ((x_{vi}))$	Antwortmatrix
[2.1.2.5]	$x_{oi} = \sum_{v=1}^{n} x_{vi}$	Itemrandsumme

2.1.3 Die Beurteilung von Testleistungen

[2.1.3.1]	$IQ \ldots N(100;15^2)$	Verteilung des Intelligenzquotienten
[2.1.3.2]	$z = \dfrac{x_{vo} - \mu}{\sigma}$	Standardtransformation
[2.1.3.3]	$IQ = 100 + 15z$	Transformation in IQ-Punkte

2.2 Testen und Messen

2.2.1 Grundannahmen der klassischen Testtheorie

[2.2.1.1]	$F_{ot} = X_{ot} - T_{ot}$	Fehlervariable des Tests t in der Referenzpopulation
[2.2.1.2]	$f_{vt} = x_{vt} - \tau_{vt}$	Messfehler der Vp v in Test t
	$A1: E(F_{ot}) = 0$	1. Axiom von Gulliksen
	$A2: \rho(T_{ot}, F_{ot}) = 0$	2. Axiom von Gulliksen
	$A3: \rho(F_{ot}, F_{ot'}) = 0$	3. Axiom von Gulliksen
	$A4: \rho(F_{ot}, T_{ot'}) = 0$	4. Axiom von Gulliksen
[2.2.1.3]	$\tau_{vt} = E(X_{vt})$	Definition des True-Scores nach Novick

2.2.2 Reliabilität und Validität

[2.2.2.1]	$\rho^2(X_{ot}, T_{ot}) = \rho^2_{XT}$	Reliabilität
[2.2.2.2]	$\rho(X_{ot}, Y_{ot'}) = \rho_{XY}$	Validität
[2.2.2.3]	$\rho(X_{ot}, Y_{ot'}) = \rho(X_{ot}, T_{ot})\,\rho(T_{ot}, T_{ot'})\,\rho(Y_{ot'}, T_{ot'})$	
[2.2.2.4]	$\rho^2_{XT} = \rho(X_{ot}, Y_{ot'})$	Bei essentieller Parallelität
[2.2.2.5]	$\rho(X_{ot}, Y_{ot'}) = \rho(X_{ot}, T_{ot})\,\rho(Y_{ot'}, T_{ot'}) = \sqrt{\rho^2_{XT}\ \rho^2_{YT}}$	

[2.2.2.6]	$\rho\left(X_{ot}, Y_{ot'}\right) < \rho^2_{XT}$	Bei Verletzung der essentiellen τ-Äquivalenz und gleicher Messgenauigkeit
[2.2.2.7]	$\rho\left(X_{ot}, Y_{ot'}\right) < \sqrt{\rho^2_{XT}\ \rho^2_{YT}}$	Bei Verletzung der essentiellen τ-Äquivalenz und unterschiedlicher Messgenauigkeit
[2.2.2.8]	$\rho\left(X_{ot}, Y_{ot'}\right) \leq \sqrt{\rho^2_{XT}\ \rho^2_{YT}}$	Allgemein
[2.2.2.9]	$\sigma\left(X_{ot}, F_{ot'}\right) = 0$	
[2.2.2.10]	$\rho\left(X_{ot}, Y_{ot'}\right) = \rho\left(X_{ot}, T_{ot'}\right)\rho\left(Y_{ot'}, T_{ot'}\right)$	
[2.2.2.11]	$\rho\left(X_{ot}, T_{ot'}\right) = \rho\left(X_{ot}, T_{ot}\right)\rho\left(T_{ot}, T_{ot'}\right)$	
[2.2.2.12]	$\rho_{XY} \leq \sqrt{\rho^2_{XT}}$	Größtmögliche Validität eines Tests
[2.2.2.13]	$\rho^2_{XT} = \frac{\sigma^2\left(T_{ot}\right)}{\sigma^2\left(X_{ot}\right)} = \frac{\sigma^2\left(T_{ot}\right)}{\sigma^2\left(T_{ot}\right) + \sigma^2\left(F_{ot}\right)}$	Reliabilität = systematischer Varianzanteil
[2.2.2.14]	$\rho_{XT} = \frac{\sigma\left(X_{ot}, T_{ot}\right)}{\sigma\left(X_{ot}\right)\sigma\left(T_{ot}\right)}$	Quadratwurzel aus der Reliabilität
[2.2.2.15]	$\sigma\left(X_{ot}, T_{ot}\right) = \sigma^2\left(T_{ot}\right)$	
[2.2.2.16]	$\sigma\left(F_{ot}\right) = \sigma\left(X_{ot}\right)\sqrt{1 - \rho^2_{XT}}$	Standardmessfehler
[2.2.2.17]	$\rho^2_{XT} = \frac{2\rho^2_{XT_o}}{1 + \rho^2_{XT_o}}$	Spearman-Brown Formel
[2.2.2.18]	$\rho^2_{XT} = \frac{\sigma^2\left(T_{ot}\right)}{\sigma^2\left(X_{ot}\right)} = \frac{\sigma^2\left(T_{o1} + T_{o2}\right)}{\sigma^2\left(X_{o1} + X_{o2}\right)}$	Reliabilität
[2.2.2.19]	$\sigma^2\left(T_{o1} + T_{o2}\right) = \sigma^2\left(T_{o1}\right) + \sigma^2\left(T_{o2}\right) + 2\sigma\left(T_{o1}, T_{o2}\right)$	
[2.2.2.20]	$\sigma^2\left(X_{o1} + X_{o2}\right) = \sigma^2\left(X_{o1}\right) + \sigma^2\left(X_{o2}\right) + 2\rho\left(X_{o1}, X_{o2}\right)\sigma\left(X_{o1}\right)\sigma\left(X_{o2}\right)$	
[2.2.2.21]	$\sigma^2\left(T_{o1} + T_{o2}\right) = 4\sigma^2\left(T_{oo}\right)$	
[2.2.2.22]	$\sigma^2\left(X_{o1} + X_{o2}\right) = 2\sigma^2\left(X_{oo}\right)\left(1 + \rho^2_{XT_o}\right)$	
[2.2.2.23]	$\rho^2_{XT} = \frac{n\ \rho^2_{XT_o}}{1 + \left(n-1\right)\rho^2_{XT_o}}$	Verallgemeinerte Spearman-Brown Formel
[2.2.2.24]	$n = \frac{R\left(1-r\right)}{\left(1-R\right)r}$	Für gewünschte Reliabilität erforderliche Testlänge

[2.2.2.25] $\rho^2_{XT_o} \cong r(X_{o1}, X_{o2})$ Reliabilität zweier (essentiell) paralleler Subtests

[2.2.2.26] $\rho^2_{XT_o} \cong \sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{\prod_{j=1}^{n-1} \prod_{j'=j+1}^{n} r(X_{oj}, X_{oj'})}$ Reliabilität mehrerer (essentiell) paralleler Subtests

[2.2.2.27] $\rho^2_{XT} \geq \alpha$ Koeffizient Alpha

[2.2.2.28] $\alpha_2 = 2\left(1 - \frac{\sigma^2(X_{o1}) + \sigma^2(X_{o2})}{\sigma^2(X_{ot})}\right)$ Koeffizient Alpha für n = 2

[2.2.2.29] $\alpha_n = \frac{n}{n-1}\left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{n} \sigma^2(X_{oj})}{\sigma^2(X_{ot})}\right)$ Koeffizient Alpha für n ≥ 2

[2.2.2.30] $\alpha_k = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{oi}(1 - p_{oi})}{\sigma^2(X_{ot})}\right)$ Koeffizient Alpha für n = k binäre Items (KR 20)

[2.2.2.31] $\alpha_k = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{k\, p_{oo}(1 - p_{oo})}{\sigma^2(X_{ot})}\right)$ Spezialfall für parallele Items (KR 21)

[2.2.2.32] $\rho^2_{XT} = \frac{\sigma^2(T_{ot})}{\sigma^2(X_{ot})} \geq \frac{4\sigma(T_{o1}, T_{o2})}{\sigma^2(X_{ot})}$

[2.2.2.33] $\sigma(X_{o1}, X_{o2}) = \sigma(T_{o1}, T_{o2})$

[2.2.2.34] $\sigma^2(X_{oj}) = \sigma^2(T_{oo}) + \sigma^2(F_{oj})$ Für (essentiell) τ-äquivalente Subtests

[2.2.2.35] $\sigma^2(T_{ot}) = 4\sigma^2(T_{oo})$ Für (essentiell) τ-äquivalente Subtests

[2.2.2.36] $\sigma^2(X_{ot}) = 4\sigma^2(T_{oo}) + \sigma^2(F_{o1}) + \sigma^2(F_{o2})$ Für (essentiell) τ-äquivalente Subtests

[2.2.2.37] $\rho^2_{XT} = \frac{4\sigma^2(T_{oo})}{4\sigma^2(T_{oo}) + \sigma^2(F_{o1}) + \sigma^2(F_{o2})}$ Für (essentiell) τ-äquivalente Subtests

[2.2.2.38] $\rho(X_{o1}, X_{o2}) = \frac{\sigma^2(T_{oo})}{\sqrt{(\sigma^2(T_{oo}) + \sigma^2(F_{o1}))(\sigma^2(T_{oo}) + \sigma^2(F_{o2}))}}$ Für (essentiell) τ-äquivalente Subtests

[2.2.2.39] $\frac{2\rho(X_{o1}, X_{o2})}{1 + \rho(X_{o1}, X_{o2})} =$

$= \frac{4\sigma^2(T_{oo})}{2\sigma^2(T_{oo}) + 2\sqrt{(\sigma^2(T_{oo}) + \sigma^2(F_{o1}))(\sigma^2(T_{oo}) + \sigma^2(F_{o2}))}}$ Für (essentiell) parallele Subtests

[2.2.2.40] $2\sqrt{\left(\sigma^2(T_{oo})+\sigma^2(F_{o1})\right)\left(\sigma^2(T_{oo})+\sigma^2(F_{o2})\right)} =$

$= 2\sigma^2(T_{oo})+\sigma^2(F_{o1})+\sigma^2(F_{o2})$ Für (essentiell) parallele Subtests

[2.2.2.41] $\rho^2_{XT} \geq \max(\alpha_2, \alpha_n, \alpha_k)$ Untere Schranke für die Reliabilität

2.2.3 Stochastische Testmodelle

[2.2.3.1] $([x_{vi}=1] \wedge [x_{wi}=0]) \Rightarrow v >^\circ w$ Empirische Ordnungsrelation der Guttman-Skala

[2.2.3.2] $x_{vi} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \theta_v > \delta_i \\ 0 & \text{wenn } \theta_v \leq \delta_i \end{cases}$ Itemcharakteristikfunktion der Guttman-Skala

[2.2.3.3] $\theta_v = \sum_{i=1}^{k} x_{vi}$ Rangplatz der Vp v auf der Guttman-Skala

[2.2.3.4] $X \to Y : x \to y = a + cx \quad \text{mit } c > 0$ Positive lineare Transformation

[2.2.3.5] $\forall_v \forall_{i \in I} : p_{vi} = f_i(\theta_v)$ Itemcharakteristikfunktion dichotomer Latent-Trait-Modelle

[2.2.3.6] $\theta_v > \theta_w \Leftrightarrow p_{vi} > p_{wi}$ Empirische Ordnungsrelation dichotomer Latent-Trait-Modelle

[2.2.3.7] $f_i(\theta_v) = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha_i(\theta_v - \delta_i) \geq 1 \\ \alpha_i(\theta_v - \delta_i) & \text{für } 0 \leq \alpha_i(\theta_v - \delta_i) \leq 1 \\ 0 & \text{für } \alpha_i(\theta_v - \delta_i) \leq 0 \end{cases}$ Lineare Itemcharakteristik

[2.2.3.8] $f_i(\theta_v) = f_\bullet(\theta_v) = p_{v\bullet} = \theta_v$ Itemcharakteristik des Binomialmodells (BM)

[2.2.3.9] $f_i(\theta_v) = \Phi(\alpha_i(\theta_v - \delta_i)) = \int_{-\infty}^{\alpha_i(\theta_v - \delta_i)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} dz$ Itemcharakteristik des Normal-Ogive-Modells

[2.2.3.10] $f_i(\theta_v) = \frac{e^{\alpha_i(\theta_v - \delta_i)}}{1 + e^{\alpha_i(\theta_v - \delta_i)}}$ Itemcharakteristik des Birnbaum-Modells

[2.2.3.11] $f_i(\theta_v) = \frac{e^{\theta_v - \delta_i}}{1 + e^{\theta_v - \delta_i}}$ Itemcharakteristik des Rasch-Modells (RM)

[2.2.3.12] $f_i(\theta_v) = f_\bullet(\theta_v) = \frac{e^{\theta_v}}{1 + e^{\theta_v}}$ Darstellung des BM als Spezialfall des RM

[2.2.3.13] $\Theta^{(B)} \to \Theta^{(R)} : \theta_v^{(B)} = p_{v\bullet} \to \theta_v^{(R)} = \ln\left(\frac{p_{v\bullet}}{1 - p_{v\bullet}}\right)$ Skalentransformation BM $\to$ RM

[2.2.3.14] $\text{prob}(X) = \prod_{v=1}^{n}\left(\sum_{g=1}^{h} \text{prob}\{v \in g\} \prod_{i=1}^{k} \text{prob}\{X_{vi} = x_{vi} | v \in g\}\right)$ Grundgleichung der Latent-Class-Analyse

[2.2.3.15] $h_{max} = \prod_{i=1}^{k} m_i$ Anzahl der möglichen Antwortmuster

2.2.4 Das Konzept der lokalen stochastischen Unabhängigkeit

[2.2.4.1] $prob(x_v) = prob(x_{v1},\dots,x_{vk}) = \prod_{i=1}^{k} prob(x_{vi})$ Definition der lokalen Unabhängigkeit

[2.2.4.2] $prob(x_v) = prob(x_{v1},\dots,x_{vk}) = \prod_{i=1}^{k} prob(x_{vi} | (x_{v1},\dots,x_{vi-1}))$ Definition der seriellen Abhängigkeit

2.3 Klassische und stochastische Testtheorie

2.3.1 Ein allgemeines testtheoretisches Modell

[2.3.1.1] $prob(x_{v1},\dots,x_{vk}) = \prod_{i=1}^{k} f_{vi}(x_{vi})$ Lokale Unabhängigkeit

[2.3.1.2] $X_{vi} \equiv X_{\bullet\bullet}$ Pure-Random-Modell

[2.3.1.3] $f_{vi}(x) = f_{\bullet\bullet}(x) = prob(X_{vi} = x) = p_{\bullet\bullet x}$ Wahrscheinlichkeitsdichte des PR-Modells

[2.3.1.4] $X_{vi} \equiv X_{\bullet i}$ Identische Personen (LC1)

[2.3.1.5] $f_{vi}(x) = f_{\bullet i}(x) = prob(X_{vi} = x) = p_{\bullet ix}$ Wahrscheinlichkeitsdichte der LC1

[2.3.1.6] $f_{vi}(x) = prob(X_{vi} = x | \theta_v) = f_i(x, \theta_v)$ Wahrscheinlichkeitsdichte der Latent-Trait-Modelle

[2.3.1.7] $prob(X_{vi} = x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x, \theta)\, g(\theta)\, d\theta$ Antwortwahrscheinlichkeit einer zufällig herausgegriffenen Vp

[2.3.1.8] $X_{vi} \equiv X_{v\bullet}$ Identische Items (II-Modell)

[2.3.1.9] $f_{vi}(x) = f_{v\bullet}(x) = prob(X_{vi} = x | \theta_v) = p_{v\bullet x}$ Wahrscheinlichkeitsdichte des II-Modells

[2.3.1.10] $v \in g \Leftrightarrow \theta_v = \theta_g$ Latente Variable der Latent-Class-Modelle

[2.3.1.11] $f_{vi}(x) = prob(X_{vi} = x | \theta_v)$

$= prob(X_{vi} = x | v \in g) = p_{gix}$ Klassenspezifische Kategorienwahrscheinlichkeiten

[2.3.1.12] $prob(X_{vi} = x) = \sum_{g=1}^{h} p_{gix}\, p_g$ Antwortwahrscheinlichkeit einer zufällig herausgegriffenen Vp

[2.3.1.13] $p_g = prob(v \in g)$ Klassengröße

[2.3.1.14] $f_{vi}(x) = \text{prob}(X_{vi} = x | v \in g) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = x_{gi} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Saturiertes Modell

[2.3.1.15] $E(X_{vi}) = \sum_{x=0}^{m_i-1} x \; f_{vi}(x)$ Erwartungswert der Antwortvariablen

[2.3.1.16] $E(X_{vi}^2) = \sum_{x=0}^{m_i-1} x^2 \; f_{vi}(x)$ Zweites Moment der Antwortvariablen

[2.3.1.17] $\sigma^2(X_{vi}) = E(X_{vi}^2) - E(X_{vi})^2$ Varianz der Antwortvariablen

[2.3.1.18] $x_{vt} = \sum_{i=1}^{k} x_{vi}$ Summenscore

[2.3.1.19] $E(X_{vt}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x=0}^{m_i-1} x \; f_{vi}(x)$ Erwartungswert des Summenscores

[2.3.1.20] $\sigma^2(X_{vt}) = \sum_{i=1}^{k} \sigma^2(X_{vi})$ Varianz des Summenscores

[2.3.1.21] $x_{gt} = \sum_{i=1}^{k} x_{gi}$ Spezialfall: Summenscore des saturierten Modells

2.3.2 Rechtfertigung der Scorebildung

[2.3.2.1] $\tau_{vt} = k \, E(X_{\bullet\bullet}) = k \sum_{x=0}^{m_i-1} x \, p_{\bullet\bullet x}$ Pure-Random-Modell

[2.3.2.2] $\tau_{vt} = \sum_{i=1}^{k} E(X_{\bullet i}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x=0}^{m_i-1} x \, p_{\bullet ix}$ Identische Personen (LC1)

[2.3.2.3] $\tau_{vt} = \sum_{i=1}^{k} E(X_{v\bullet}) = k E(X_{v\bullet}) = k \sum_{x=0}^{m-1} x \, p_{v\bullet x}$ Identische Items

[2.3.2.4] $\tau_{vt} = k \; p_{v\bullet}$ Spezialfall für dichotome Items (Binomialmodell)

[2.3.2.5] $\tau_{vt} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x=0}^{m_i-1} x \; f_i(x, \theta_v)$ Latent-Trait-Modelle

[2.3.2.6] $\tau_{vt} = \sum_{i=1}^{k} f_i(\theta_v)$ Spezialfall für dichotome Items

[2.3.2.7] $\tau_{vt} = \sum_{i=1}^{k} \frac{e^{\theta_v - \delta_i}}{1 + e^{\theta_v - \delta_i}}$ Rasch-Modell

[2.3.2.8] $\tau_{vt} = \tau_{gt} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{x=0}^{m_i-1} x \; p_{gix}$ Latent-Class-Modelle

[2.3.2.9] $\tau_{vt} = \tau_{gt} = \sum_{i=1}^{k} p_{gi}$ Spezialfal für dichotome Items

[2.3.2.10] $\tau_{vt} = \tau_{gt} = x_{gt} = \sum_{i=1}^{k} x_{gi}$ Saturiertes Modell

[2.3.2.11] $p_{gi} = \text{prob}(X_{vi} = 1 | v \in g)$ Klassenspezifische Itemlösungswahrscheinlichkeiten

[2.3.2.12] $\theta_g > \theta_q \Leftrightarrow p_{gi} > p_{qi}$ für i = 1,...,k Quantitativ verschiedene latente Klassen

[2.3.2.13] $\theta_v > \theta_w \Leftrightarrow p_{vi} > p_{wi}$ für i = 1,...,k Anordnung der Vpn auf einer latenten Dimension

[2.3.2.14] $\text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk}) | x_{vo}\} = \dfrac{\text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk}) | \theta_v\}}{\text{prob}(x_{vo} | \theta_v)}$ Suffizienz des Summenscores

[2.3.2.15] $\text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk}) | \theta_v\} = \theta_v^{x_{vo}} (1-\theta_v)^{k-x_{vo}}$ Binomialmodell

[2.3.2.16] $\text{prob}\{x_{vo} | \theta_v\} = \binom{k}{x_{vo}} \theta_v^{x_{vo}} (1-\theta_v)^{k-x_{vo}}$ Binomialmodell

[2.3.2.17] $\text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk}) | x_{vo} = g\} = \binom{k}{g}^{-1}$ für g = 0,...,k Binomialmodell

[2.3.2.18] $f_{ix}(\theta_v) = \text{prob}(X_{vi} = x)$ Rasch-Modell

$= \dfrac{\lambda_{vi}^x}{1+\lambda_{vi}}$ mit $\lambda_{vi} = \xi_v \varepsilon_i$

$= \dfrac{(\xi_v \varepsilon_i)^x}{1+\xi_v \varepsilon_i}$ mit $\xi_v = \exp(\theta_v)$ und $\varepsilon_i = \exp(-\delta_i)$

$= \dfrac{\exp(x(\theta_v - \delta_i))}{1+\exp(\theta_v - \delta_i)}$ mit $\theta_v = \ln(\xi_v)$ und $\delta_i = -\ln(\varepsilon_i)$

[2.3.2.19] $f_{ix.r}(\theta_v) = \text{prob}(X_{vi} = x | x_{vo}^{(i)} = r)$ Dynamisches Testmodell

$= \dfrac{\lambda_{vi.r}^x}{1+\lambda_{vi.r}}$ mit $\lambda_{vi.r} = \xi_{v.r} \varepsilon_{i.r}$

$= \begin{cases} \dfrac{\xi_v + \psi_r}{\xi_v + \sigma_i} & \text{für } x = 1 \\ \dfrac{\sigma_i - \psi_r}{\xi_v + \sigma_i} & \text{für } x = 0 \end{cases}$ mit $\xi_{v.r} = \xi_v + \psi_r$ und $\varepsilon_{i.r} = (\sigma_i - \psi_r)^{-1}$,

[2.3.2.20] $p_{vi.r} = p_{vi} + (1-p_{vi})\, p_{ri}$ Dynamisches Testmodell

[2.3.2.21] $p_{vi} = \dfrac{\xi_v \varepsilon_i}{1+\xi_v \varepsilon_i}$ Trait-bedingte Aufgabenlösung

[2.3.2.22] $p_{ri} = \psi_r \varepsilon_i$ Transfer-bedingte Aufgabenlösung

[2.3.2.23] $n_{vo} = (n_{vo0},\ldots,n_{vom-1})$ Scorevektor für polytome Antwortvariablen

[2.3.2.24] $f_{ix}(\theta_v) = \text{prob}(X_{vi} = x)$ Polytomes Rasch-Modell

$= \frac{\lambda_{vix}}{\sum_{y=0}^{m-1} \lambda_{viy}}$ mit $\lambda_{vix} = \xi_{vx}\varepsilon_{ix}$

$= \frac{\xi_{vx}\varepsilon_{ix}}{\sum_{y=0}^{m-1} \xi_{vy}\varepsilon_{iy}}$ mit $\xi_{vx} = \exp(\theta_{vx})$ und $\varepsilon_{ix} = \exp(-\delta_{ix})$

$= \frac{\exp(\theta_{vx} - \delta_{ix})}{\sum_{y=o}^{m-1} \exp(\theta_{vy} - \delta_{iy})}$ mit $\theta_{vx} = \ln(\xi_{vx})$ und $\delta_{ix} = -\ln(\varepsilon_{ix})$

[2.3.2.25] $\theta_v = (\theta_{v0}, \ldots, \theta_{vm-1})$ und $\delta_i = (\delta_{i0}, \ldots, \delta_{im-1})$ Polytomes Rasch-Modell

[2.3.2.26] $\xi_v = (\xi_{v0}, \ldots, \xi_{vm-1})$ und $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i0}, \ldots, \varepsilon_{im-1})$ Polytomes Rasch-Modell

[2.3.2.27] $\sum_{x=0}^{m-1} f_{ix}(\theta_v) = 1$ Polytomes Rasch-Modell

[2.3.2.28] $f_{ix}(\theta_v) = \frac{\exp(x\theta_v - \delta_{ix})}{\sum_{y=0}^{m-1} \exp(y\theta_v - \delta_{iy})}$ mit $\delta_{i0} = 0$ Ordinales Rasch-Modell

[2.3.2.30] $\text{prob}\{X_{vi} = x | x-1 \le X_{vi} \le x\} = \frac{\exp(\theta_v - \alpha_{ix})}{1 + \exp(\theta_v - \alpha_{ix})}$ Schwellenwahrscheinlichkeiten

[2.3.2.31] $\delta_{ix} = \sum_{j=1}^{x} \alpha_{ij}$ Kategorienschwierigkeiten

[2.3.2.32] $f_{ix}(\xi_v) = \text{prob}(X_{vi} = x)$ Poisson-Modell

$= \frac{\lambda_{vi}^x}{x!} e^{-\lambda_{vi}}$ mit $\lambda_{vi} = \xi_v \varepsilon_i$

$= \frac{(\xi_v \varepsilon_i)^x}{x!} e^{-\xi_v \varepsilon_i}$.

[2.3.2.33] $\text{prob}\{X_{vi} = x | x-1 \le X_{vi} \le x\} = \frac{\xi_v \alpha_{ix}}{1 + \xi_v \alpha_{ix}}$ Schwellenwahrscheinlichkeiten

[2.3.2.34] $\alpha_{ix} = \varepsilon_i \, x^{-1}$ Schwellenparameter

2.3.3 Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Suffizienz des Summenscores

[2.3.3.1] $\text{prob}\{(x_{v1}, \ldots, x_{vk}) | x_{vo} = g\} = \frac{\prod_{i=1}^{k} \varepsilon_i^{x_{vi}}}{\gamma_g(\varepsilon)}$ für $g = 0, \ldots, k$ Rasch-Modell

[2.3.3.2] $\gamma_0(\varepsilon) = 1$ Symmetrische Grundfunktionen

$\gamma_1(\varepsilon) = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_k$

$\gamma_2(\varepsilon) = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_1\varepsilon_k + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \ldots + \varepsilon_{k-1}\varepsilon_k$

$\gamma_3(\varepsilon) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4 + \ldots + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_k + \varepsilon_1\varepsilon_3\varepsilon_4 + \ldots + \varepsilon_{k-2}\varepsilon_{k-1}\varepsilon_k$

……

$\gamma_k(\varepsilon) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots\varepsilon_k$

[2.3.3.2] $\gamma_{g+1}(\varepsilon) = \frac{1}{g+1}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i\gamma_g^{(i)}(\varepsilon)$ Rekursionsformeln

$\gamma_{g+1}^{(i)}(\varepsilon) = \gamma_{g+1}(\varepsilon) - \varepsilon_i\gamma_g^{(i)}(\varepsilon)$

[2.3.3.3] $\text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})|\theta_v\} = \frac{\xi_v^g}{\prod_{i=1}^{k}(1+\xi_v\varepsilon_i)}\prod_{i=1}^{k}\varepsilon_i^{x_{vi}}$ Rasch-Modell

[2.3.3.4] $\text{prob}(x_{vo} = g|\theta_v) = \frac{\xi_v^g}{\prod_{i=1}^{k}(1+\xi_v\varepsilon_i)}\gamma_g(\varepsilon)$ Rasch-Modell

[2.3.3.5] $\text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})|x_{vo} = g\} = \frac{\text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})|\theta_v\}}{\text{prob}(x_{vo} = g|\theta_v)}$

[2.3.3.6] $\text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})|x_{vo} = g\} = \frac{\prod_{i=1}^{k}\varepsilon_i^{x_{vi}}}{\gamma_g(\varepsilon)}$ Suffizienz des Summenscores

[2.3.3.7] $\xi_v = \frac{p_{v1}}{1-p_{v1}}$ Definition von ξ_v

[2.3.3.8] $f_1 = p_{v1} = \frac{\xi_v}{1+\xi_v}$ Itemcharakteristik des ersten Items

[2.3.3.9] $\text{prob}\{(x_{v1}, x_{v2})|x_{vo}\} = \frac{\text{prob}\{(x_{v1}, x_{v2})|\theta_v\}}{\text{prob}(x_{vo}|\theta_v)} = c$ Suffizienz des Summenscores

[2.3.3.10] $f_2 = p_{v2} = \frac{\xi_v\varepsilon_2}{1+\xi_v\varepsilon_2}$ Itemcharakteristik des zweiten Items

[2.3.3.11] $f_i = \frac{\xi_v\varepsilon_i}{1+\xi_v\varepsilon_i}$ Itemcharakteristiken der ersten k Items

[2.3.3.12] $x_{vo} = \sum_{i=1}^{k}x_{vi}$ Summenscore

[2.3.3.13] $$x_{v*} = \sum_{i=1}^{k+1} x_{vi} = x_{vo} + x_{vk+1}$$ Erweiteter Summenscore

[2.3.3.14] $$\mathrm{prob}\left\{(x_{v1},\ldots,x_{vk},x_{vk+1})\middle|x_{v*}\right\} = \frac{\mathrm{prob}\left\{(x_{v1},\ldots,x_{vk},x_{vk+1})\middle|\theta_v\right\}}{\mathrm{prob}\left\{x_{v*}\middle|\theta_v\right\}} = c$$ Suffizienz des erweiterten Summenscores

[2.3.3.15] $$f_{k+1} = p_{vk+1} = \frac{\xi_v \varepsilon_{k+1}}{1+\xi_v \varepsilon_{k+1}}$$ Itemcharakteristik des [k+1]-ten Items

[2.3.3.16] $$\mathrm{prob}\left\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})\middle|x_{vo} = g\right\} = \frac{\prod_{i=1}^{k}\prod_{r=0}^{i-1}(\sigma_i - \psi_r)^{z_{vir}(1-x_{vi})}}{G(g,\psi,\sigma)}$$ Dynamisches Testmodell

[2.3.3.17] $$G(g,\psi,\sigma) = \sum_{y_v:y_{vo}=g}\prod_{i=1}^{k}\prod_{r=0}^{i-1}(\sigma_i - \psi_r)^{a_{vir}(1-y_{vi})}$$

[2.3.3.18] $$\mathrm{prob}\left\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})\middle|\xi_v\right\} = \prod_{r=0}^{g-1}(\xi_v + \psi_r)\prod_{i=1}^{k}\frac{\prod_{r=0}^{i-1}(\sigma_i - \psi_r)^{z_{vir}(1-x_{vi})}}{\xi_v + \sigma_i}$$ Dynamisches Testmodell

[2.3.3.19] $$\mathrm{prob}\left(x_{vo} = g\middle|\xi_v\right) = \prod_{r=0}^{g-1}(\xi_v + \psi_r)\sum_{y_v:y_{vo}=g}\prod_{i=1}^{k}\frac{\prod_{r=0}^{i-1}(\sigma_i - \psi_r)^{a_{vir}(1-y_{vi})}}{\xi_v + \sigma_i}$$ Dynamisches Testmodell

[2.3.3.20] $$\mathrm{prob}\left\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})\middle|x_{vo} = g\right\} = \frac{\mathrm{prob}\left\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})\middle|\xi_v\right\}}{\mathrm{prob}\left(x_{vo} = g\middle|\xi_v\right)}$$

[2.3.3.21] $$\mathrm{prob}\left\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})\middle|x_{vo} = g\right\} = \frac{\prod_{i=1}^{k}\prod_{r=0}^{i-1}(\sigma_i - \psi_r)^{z_{vir}(1-x_{vi})}}{\sum_{y_v:y_{vo}=g}\prod_{i=1}^{k}\prod_{r=0}^{i-1}(\sigma_i - \psi_r)^{a_{vir}(1-y_{vi})}}$$ Suffizienz des Summenscores

[2.3.3.22] $$G(g,\psi,\sigma) = \sum_{m=0}^{k-g}\beta_m(g,\psi)\gamma_{k-g-m}(\sigma)(-1)^m$$

[2.3.3.23] $$\beta_m(g+1,\psi) = \sum_{j=0}^{m}\psi_{g+1}^{m-j}\,\beta_j(g,\psi)$$ Rekursionsformel

[2.3.3.24] $$\xi_v = \frac{f_{1.0}}{1-f_{1.0}}$$ Definition von ξ_v

[2.3.3.25] $$\sigma_2 = \frac{f_{1.0}}{1-f_{1.0}}\,\frac{1-f_{2.0}}{f_{2.0}}$$ Definition von σ_2

[2.3.3.26] $$f_{1.0} = \frac{\xi_v}{\xi_v + 1}$$ Bedingte Itemcharakteristik, Item 1, r = 0

[2.3.3.27] $f_{2.0} = \frac{\xi_v}{\xi_v + \sigma_2}$ Bedingte Itemcharakteristik, Item 2, r = 0

[2.3.3.28] $\text{prob}\{(1,0)|x_{vo} = 1\} = \frac{\text{prob}\{(1,0)|\xi_v\}}{\text{prob}\{(1,0)|\xi_v\} + \text{prob}\{(0,1)|\xi_v\}} = c$ Suffizienz des Summenscores

[2.3.3.29] $\text{prob}\{(0,1)|x_{vo} = 1\} = \frac{\text{prob}\{(0,1)|\xi_v\}}{\text{prob}\{(1,0)|\xi_v\} + \text{prob}\{(0,1)|\xi_v\}} = c$ Suffizienz des Summenscores

[2.3.3.30] $\frac{\text{prob}\{(1,0)|\xi_v\}}{\text{prob}\{(0,1)|\xi_v\}} = \frac{f_{1.0}(1 - f_{2.1})}{(1 - f_{1.0})f_{2.0}} = c$

[2.3.3.31] $f_{2.1} = \frac{\xi_v + \psi_1}{\xi_v + \sigma_2}$ Bedingte Itemcharakteristik, Item 2, r = 1

[2.3.3.32] $f_{i.r} = \frac{\xi_v + \psi_r}{\xi_v + \sigma_i}$ Bedingte Itemcharakteristiken der ersten k Items

[2.3.3.33] $f_{k+1.k-1} = \frac{\xi_v + \psi_{k-1}}{\xi_v + \sigma_{k+1}}$ Bedingte Itemcharakteristik, Item k+1, r = k-1

[2.3.3.34] $f_{k+1.k} = \frac{\xi_v + \psi_k}{\xi_v + \sigma_{k+1}}$ Bedingte Itemcharakteristik, Item k+1, r = k

[2.3.3.35] $\text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk},0)|x_{v*} = k\} =$ Suffizienz des erweiterten Summenscores

$$= \frac{\text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk}) \wedge x_{vo} = k|\xi_v\}(1 - f_{k+1.k})}{\text{prob}(x_{vo} = k|\xi_v)(1 - f_{k+1.k}) + \text{prob}(x_{vo} = k-1|\xi_v)f_{k+1.k-1}} = c$$

[2.3.3.36] $\frac{f_{k+1.k-1}\,\text{prob}(x_{vo} = k-1|\xi_v)}{(1 - f_{k+1.k})\text{prob}(x_{vo} = k|\xi_v)} = c$

2.4 Parameterschätzung, Modellkontrolle und Beurteilung der Testleistung der Probanden in der klassischen Testtheorie

2.4.1 Parameterschätzung

[2.4.1.1] $\hat{\tau}_{vt} = x_{vt}$ Schätzwert für den True-Score

[2.4.1.2] $\sigma(\hat{\tau}_{vt}) \cong \sigma(F_{ot}) = \sigma(X_{ot})\sqrt{1 - \rho^2_{XT}}$ Fehlerstreuung der True-Score Schätzung

2.4.2 Überprüfung der Modellannahmen

[2.4.2.1]	$E(X_{ot}) = E(X_{ot'})$		Gilt für τ-Äquivalenz und Parallelität
[2.4.2.2]	$\sigma^2(X_{ot}) = \sigma^2(X_{ot'})$		Gilt für Parallelität und essentielle Parallelität
[2.4.2.3]	$\rho(X_{ot}, Y_o) = \rho(X_{ot'}, Y_o)$		Gilt für Parallelität und essentielle Parallelität
[2.4.2.4]	$E(X_{ot} - X_{ot'}) = c_{tt'}$		Gilt für essentielle τ-Äquivalenz
[2.4.2.5]	$E(X_{1t} - X_{1t'}) = E(X_{2t} - X_{2t'})$		Gilt für essentielle τ-Äquivalenz
[2.4.2.6]	$t = \sqrt{n}\,\frac{m(X_{ot} - X_{ot'})}{\hat{\sigma}(X_{ot} - X_{ot'})}$	mit df = n-1	Test für [2.4.2.1]
[2.4.2.7]	$t = \sqrt{\frac{n}{2}}\;\frac{m(X_{1t} - X_{1t'}) - m(X_{2t} - X_{2t'})}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(X_{1t} - X_{1t'}) + \hat{\sigma}^2(X_{2t} - X_{2t'})}}$	mit df = n-2	Test für [2.4.2.5]
[2.4.2.8]	$t = \sqrt{n}\;\frac{m(D_{ot} - D_{ot'})}{\hat{\sigma}(D_{ot} - D_{ot'})}$	mit df = n-1	Test für [2.4.2.2]
[2.4.2.9]	$z = \frac{\sqrt{n-3}\,(z_{tY} - z_{t'Y})}{\sqrt{2 - 2CV_1}}$		Test für [2.4.2.3]

2.4.3 Beurteilung der Testleistungen

[2.4.3.1]	$KONF_\gamma\{x_{vt} - c\,\sigma(F_{ot}) \le \tau_{vt} \le x_{vt} + c\,\sigma(F_{ot})\}$	Konfidenzintervall für den True-Score
[2.4.3.2]	$prob\{-c \le Z \le c\} = \gamma$	
[2.4.3.3]	$z = \frac{x_{vt} - \tau_{krit}}{\sigma(F_{ot})}$	Test für den True-Score
[2.4.3.4]	$z = \frac{x_{vt} - x_{wt}}{\sqrt{2}\,\sigma(F_{ot})}$	Kritische Differenz zweier Vpn
[2.4.3.5]	$prob(n_{10} \le x) = F(x) = \sum_{y=0}^{x} \binom{n}{y} p^y (1-p)^{n-y}$	Test von McNemar

2.5 Parameterschätzung und Modellkontrolle im saturierten Modell

2.5.1 Parameterschätzung

[2.5.1.1]	$h_{max} = \prod_{i=1}^{k} m_i$	Anzahl der möglichen Antwortmuster

[2.5.1.2] $L(X) = \prod_{v=1}^{n} \text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})\} = \prod_{g=1}^{h_{max}} p_g^{n_g}$ Likelihood der Antwortmatrix

[2.5.1.3] $\ln\{L(X)\} = \sum_{g=1}^{h_{max}} n_g \ln(p_g)$ Log-Likelihood der Antwortmatrix

[2.5.1.4] $p_g = \text{prob}(v \in g) = \text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk}) = (x_{g1},\ldots,x_{gk})\}$ Klassengrößen

[2.5.1.5] $\hat{p}_g = \frac{n_g}{n}$ ML-Schätzer der Klassengrößen

[2.5.1.6] $\sigma(\hat{p}_g) = \sqrt{\frac{p_g(1-p_g)}{n}}$ Fehlerstreuung des ML-Schätzers [2.5.1.5]

[2.5.1.7] $\sum_{g=1}^{h_{max}} p_g = 1$

[2.5.1.8] $n(P_{sat}) = h_{max} - 1$ Anzahl der unabhängigen Modellparameter

2.6 Parameterschätzung und Modellkontrolle in Modellen mit personen- und/oder itemunabhängigen Antwortvariablen

2.6.1 Parameterschätzung

[2.6.1.1] $m_i = m$ Pure-Random-Modell

[2.6.1.2] $\text{prob}(X_{vi} = x) = p_{\bullet\bullet x}$ Kategorienwahrscheinlichkeiten

[2.6.1.3] $L(X) = \prod_{v=1}^{n} \text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})\} = \prod_{x=0}^{m-1} p_{\bullet\bullet x}^{n_{oox}}$ Likelihood der Antwortmatrix

[2.6.1.4] $n_{vix} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x_{vi} = x \\ O & \text{sonst} \end{cases}$

[2.6.1.5] $n_{oox} = \sum_{v=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} n_{vix}$

[2.6.1.6] $\ln\{L(X)\} = \sum_{x=0}^{m-1} n_{oox} \ln(p_{\bullet\bullet x})$ Log-Likelihood der Antwortmatrix

[2.6.1.7] $\hat{p}_{\bullet\bullet x} = \frac{n_{oox}}{nk}$ ML-Schätzer der Kategorienwahrscheinlichkeiten

[2.6.1.8] $\sigma(\hat{p}_{\bullet\bullet x}) = \sqrt{\frac{p_{\bullet\bullet x}(1-p_{\bullet\bullet x})}{nk}}$ Fehlerstreuung des ML-Schätzers [2.6.1.7]

[2.6.1.9] $\sum_{x=0}^{m-1} p_{\bullet\bullet x} = 1$

[2.6.1.10] $n(P_{PR}) = m - 1$ Anzahl der unabhängigen Modellparameter

[2.6.1.11] $\text{prob}(X_{vi} = x) = p_{\bullet ix}$ Identische Personen (LC1)

[2.6.1.12] $L(X) = \prod_{v=1}^{n} \text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})\} = \prod_{i=1}^{k}\prod_{x=0}^{m_i-1} p_{\bullet ix}^{n_{oix}}$ Likelihood der Antwortmatrix

[2.6.1.13] $n_{oix} = \sum_{v=1}^{n} n_{vix}$

[2.6.1.14] $\ln\{L(X)\} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{x=0}^{m_i-1} n_{oix} \ln(p_{\bullet ix})$ Log-Likelihood der Antwortmatrix

[2.6.1.15] $\hat{p}_{\bullet ix} = \frac{n_{oix}}{n}$ ML-Schätzer der Kategorienwahrscheinlichkeiten

[2.6.1.16] $\sigma(\hat{p}_{\bullet ix}) = \sqrt{\frac{p_{\bullet ix}(1 - p_{\bullet ix})}{n}}$ Fehlerstreuung des ML-Schätzers [2.6.1.15]

[2.6.1.17] $\sum_{x=0}^{m_i-1} p_{\bullet ix} = 1$

[2.6.1.18] $n(P_{LC1}) = \sum_{i=1}^{k}(m_i - 1)$ Anzahl der unabhängigen Modellparameter

[2.6.1.19] $n(P_{LC1}) = k(m-1)$ Spezialfall für $m_i = m$; $i = 1,\ldots,k$

[2.6.1.20] $\text{prob}(X_{vi} = x|\theta_v) = p_{v\bullet x}$ Identische Items (II-Modell)

[2.6.1.21] $\theta_{vx} = p_{v\bullet x}$ Kategorienwahrscheinlichkeiten

[2.6.1.22] $L(x_v|\theta_v) = \text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})|\theta_v\} = \prod_{x=0}^{m-1} p_{v\bullet x}^{n_{vox}}$ Likelihood des Antwortvektors

[2.6.1.23] $n_{vox} = \sum_{i=1}^{k} n_{vix}$

[2.6.1.24] $\ln\{L(x_v|\theta_v)\} = \sum_{x=0}^{m-1} n_{vox} \ln(p_{v\bullet x})$ Log-Likelihood des Antwortvektors

[2.6.1.25] $\hat{p}_{v\bullet x} = \frac{n_{vox}}{k}$ ML-Schätzer der Kategorienwahrscheinlichkeiten

[2.6.1.26] $\sigma(\hat{p}_{v\bullet x}) = \sqrt{\frac{p_{v\bullet x}(1 - p_{v\bullet x})}{k}}$ Fehlerstreuung des ML-Schätzers [2.6.1.25]

[2.6.1.27] $p_{v\bullet x} = \begin{cases} \theta_v & \text{für } x = 1 \\ 1-\theta_v & \text{für } x = 0 \end{cases}$ Binomialmodell

[2.6.1.28] $L(x_v \mid \theta_v) = \theta_v^{x_{vo}} (1-\theta_v)^{k-x_{vo}}$ Likelihood des Antwortvektors

[2.6.1.29] $\hat{\theta}_v = \frac{x_{vo}}{k}$ ML-Schätzer der Personenparameter

[2.6.1.30] $\sigma(\hat{\theta}_v) = \sqrt{\frac{\theta_v (1-\theta_v)}{k}}$ Fehlerstreuung des ML-Schätzers [2.6.1.29]

[2.6.1.31] $L(X) = \prod_{v=1}^{n} \text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})\}$ Likelihood der Antwortmatrix

$= \prod_{g=0}^{k} \text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk}) \mid x_{vo} = g\}^{n_g} \prod_{g=0}^{k} \text{prob}(x_{vo} = g)^{n_g}$

[2.6.1.32] $L(X) = \prod_{g=0}^{k} \binom{k}{g}^{-n_g} \prod_{g=0}^{k} p_g^{n_g}$ Likelihood der Antwortmatrix

[2.6.1.33] $\ln\{L(X)\} = \sum_{g=0}^{k} n_g \left(\ln(p_g) - \ln\left\{\binom{k}{g}\right\}\right)$ Log-Likelihood der Antwortmatrix

[2.6.1.34] $\hat{p}_g = \frac{n_g}{n}$ ML_Schätzer der Klassengrößen

[2.6.1.35] $\sigma(\hat{p}_g) = \sqrt{\frac{p_g (1-p_g)}{n}}$ Fehlerstreuung des ML-Schätzers [2.6.1.34]

[2.6.1.36] $\sum_{g=0}^{k} p_g = 1$

[2.6.1.37] $n(P_{BM}) = k$ Anzahl der unabhängigen Modellparameter

2.6.2 Überprüfung der Modellannahmen

[2.6.2.1] $e_{ab} = \frac{n_{ao} n_{ob}}{n_{oo}}$ Erwartete Häufigkeiten

[2.6.2.2] $df = (q-1)(m-1)$ Freiheitsgrade der Prüfgröße [2.6.2.3]

[2.6.2.3] $\chi^2 = \sum_{a=1}^{q} \sum_{b=1}^{m} \frac{(n_{ab} - e_{ab})^2}{e_{ab}}$ Pearson-χ^2

[2.6.2.4] $n_{ab} = n_{oix}$ mit $n_{oix} = \sum_{v=1}^{n} n_{vix}$ Kontingenztafel zur Kontrolle der Itemunabhängigkeit

[2.6.2.5] $df = (k-1)(m-1)$ Zugehörige Freiheitsgrade der Prüfgröße [2.6.2.3]

[2.6.2.6]	$n_{ab} = n_{gix} \quad \text{mit} \; n_{gix} = \sum_{v \in g} n_{vix}$	Kontingenztafel zur Kontrolle der Personenunabhängigkeit
[2.6.2.7]	$df_i = (h-1)(m_i - 1)$	Zugehörige Freiheitsgrade der Prüfgröße [2.6.2.3]
[2.6.2.8]	$\chi_o^2 = \sum_{i=1}^{k} \chi_i^2$	Zusamenfassung der χ_i^2
[2.6.2.9]	$df_o = \sum_{i=1}^{k} df_i$	Freiheitsgrade der Prüfgröße [2.6.2.8]
[2.6.2.10]	$df_o = k(h-1)(m-1)$	Spezialfall für m_i = m; i = 1,...,k
[2.6.2.11]	$df_o = k(h-1)$	Spezialfall für m_i = 2; i = 1,...,k

2.7 Parameterschätzung in Latent Trait Modellen

2.7.1 Die unbedingte Maximum-Likelihood-Methode

[2.7.1.1]	$f_i(\theta_v) = f(\theta_v, \delta_i)$	Item- und personenabhängige Antwortvariablen
[2.7.1.2]	$L(x_v \vert \theta_v) = \text{prob}\{(x_{v1}, \ldots, x_{vk}) \vert \theta_v\}$ $= \prod_{i=1}^{k} f(\theta_v, \delta_i)^{x_{vi}} (1 - f(\theta_v, \delta_i))^{1-x_{vi}}$	Likelihood des Antwortvektors der Vp v
[2.7.1.3]	$L(x_v \vert \theta_v) = = \dfrac{\xi_v^{x_{vo}} \prod_{i=1}^{k} \varepsilon_i^{x_{vi}}}{\prod_{i=1}^{k} (1 + \xi_v \varepsilon_i)}$	Likelihood des Antwortvektors im Rasch-Modell
[2.7.1.4]	$\dfrac{d \ln\{L(x_v \vert \theta_v)\}}{d\theta_v} = 0$	Nullsetzen der 1. Ableitung nach θ_v
[2.7.1.5]	$\hat{\theta}_v = u(x_v, \theta_v, \delta_1, \ldots, \delta_k)$	UML-Schätzfunktion für θ_v
[2.7.1.6]	$x_{vo} = \sum_{i=1}^{k} \dfrac{\xi_v \varepsilon_i}{1 + \xi_v \varepsilon_i}$	UML-Schätzfunktion für θ_v im Rasch-Modell
[2.7.1.7]	$uL(X) = L(X \vert \theta_1, \ldots, \theta_n)$ $= \prod_{v=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} f(\theta_v, \delta_i)^{x_{vi}} (1 - f(\theta_v, \delta_i))^{1-x_{vi}}$	Unbedingte Likelihood der Antwortmatrix
[2.7.1.8]	$uL(X) = = \dfrac{\prod_{v=1}^{n} \xi_v^{x_{vo}} \prod_{i=1}^{k} \varepsilon_i^{x_{oi}}}{\prod_{v=1}^{n} \prod_{i=1}^{k} (1 + \xi_v \varepsilon_i)}$	Unbedingte Likelihood der Antwortmatrix im Rasch-Modell

[2.7.1.9] $\frac{\partial \ln\{uL(X)\}}{\partial \theta_v} = 0$ für v = 1,...,n Nullsetzen der 1. partiellen Ableitungen nach den θ_v

[2.7.1.10] $\frac{\partial \ln\{uL(X)\}}{\partial \delta_i} = 0$ für i = 1,...,k Nullsetzen der 1. partiellen Ableitungen nach den δ_i

[2.7.1.11] $x_{vo} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\xi_v \varepsilon_i}{1+\xi_v \varepsilon_i}$ für v = 1,...,n UML-Schätzer der θ_v im Rasch-Modell

[2.7.1.12] $x_{oi} = \sum_{v=1}^{n} \frac{\xi_v \varepsilon_i}{1+\xi_v \varepsilon_i}$ für i = 1,...,k UML-Schätzer der δ_i im Rasch-Modell

[2.7.1.13] $\ln\{uL(X)\} = \sum_{v=1}^{n} x_{vo}\theta_v - \sum_{i=1}^{k} x_{oi}\delta_i - \sum_{v=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} \ln\left(1+e^{\theta_v-\delta_i}\right)$ Unbedingte Log-Likelihood der Antwortmatrix

[2.7.1.14] $\frac{\partial \ln\{uL(X)\}}{\partial \theta_v} = x_{vo} - \sum_{i=1}^{k} \frac{e^{\theta_v-\delta_i}}{1+e^{\theta_v-\delta_i}} = 0$ Nullsetzen der 1. partiellen Ableitungen nach den θ_v

[2.7.1.15] $\frac{\partial \ln\{uL(X)\}}{\partial \delta_i} = -x_{oi} + \sum_{v=1}^{n} \frac{e^{\theta_v-\delta_i}}{1+e^{\theta_v-\delta_i}} = 0$ Nullsetzen der 1. partiellen Ableitungen nach den δ_i

2.7.2 Die bedingte Maximum-Likelihood-Methode

[2.7.2.1] $cL(X) = L(X|x_{1o},...,x_{no})$ Bedingte Likelihood der Antwortmatrix

$= \prod_{v=1}^{n} \text{prob}\{(x_{v1},...,x_{vk})|x_{vo}\}$

[2.7.2.2] $cL(X) = = \frac{\prod_{i=1}^{k} \varepsilon_i^{x_{oi}}}{\prod_{g=0}^{k} \gamma_g(\varepsilon)^{n_g}}$ Bedingte Likelihood der Antwortmatrix im Rasch-Modell

[2.7.2.3] $\sum_{i=1}^{k} \delta_i = 0$ Normierung der Itemparameter

[2.7.2.4] $n(P_{CR}) = k-1$ Anzahl der unabhängigen Modellparameter

[2.7.2.5] $\frac{\partial \ln\{cL(X)\}}{\partial \delta_i} = 0$ für i = 1,...,k Nullsetzen der 1. partiellen Ableitungen nach den δ_i

[2.7.2.6] $x_{oi} = \varepsilon_i \sum_{g=1}^{k} n_g \frac{\gamma_{g-1}^{(i)}(\varepsilon)}{\gamma_g(\varepsilon)}$ CML-Schätzer der δ_i

[2.7.2.7] $\ln\{cL(X)\} = = -\sum_{i=1}^{k} x_{oi}\delta_i - \sum_{g=0}^{k} n_g \ln(\gamma_g(\varepsilon))$ Bedingte Log-Likelihood der Antwortmatrix

[2.7.2.8] $\frac{\partial \ln\{cL(X)\}}{\partial \delta_i} = -x_{oi} + \varepsilon_i \sum_{g=1}^{k} n_g \frac{\gamma_{g-1}^{(i)}(\varepsilon)}{\gamma_g(\varepsilon)} = 0$ Nullsetzen der 1. partiellen Ableitungen nach den δ_i

[2.7.2.9] $\sigma(\hat{\delta}_i) = \sqrt{\frac{1}{I(\delta_i)}}$ Asymptotische Fehlerstreuung des CML-Schätzers [2.7.2.6]

[2.7.2.10] $I(\delta_i) = \sum_{v=1}^{n} \frac{\xi_v \varepsilon_i}{(1+\xi_v \varepsilon_i)^2}$ Informationsfunktion der Itemparameter

[2.7.2.11] $I(\delta_i) = \sum_{v=1}^{n} E\left\{\left(\frac{\partial \ln(f(x_{vi}, \delta_i))}{\partial \delta_i}\right)^2\right\}$ Definition der Informationsfunktion

2.7.3 Die marginale Maximum-Likelihood-Methode

[2.7.3.1] $mL(X) = \prod_{v=1}^{n} prob\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})\}$ Marginale Likelihood der Antwortmatrix

[2.7.3.2] $prob\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})\} = \int_{-\infty}^{\infty} prob\{(x_{v1},\ldots,x_{vk}) | \theta\} g(\theta) d\theta$ Marginale Likelihood des Antwortvektors

[2.7.3.3] $prob\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})\} = prob\{(x_{v1},\ldots,x_{vk}) | x_{vo}\} prob(x_{vo})$ Spezialfall: Rasch-Modell

[2.7.3.4] $mL(X) = \prod_{v=1}^{n} prob\{(x_{v1},\ldots,x_{vk}) | x_{vo}\} \prod_{v=1}^{n} prob(x_{vo})$ Spezialfall: Rasch-Modell

[2.7.3.5] $mL(X) = cL(X) \prod_{g=0}^{k} prob(x_{vo} = g)^{n_g}$ Spezialfall: Rasch-Modell

[2.7.3.6] $mL(X) = cL(X) \prod_{g=0}^{k} p_g^{n_g}$ Spezialfall: Rasch-Modell

[2.7.3.7] $\ln\{mL(X)\} = \ln\{cL(X)\} + \sum_{g=0}^{k} n_g \ln(p_g)$ Marginale Log-Likelihood der Antwortmatrix im Rasch-Modell

[2.7.3.8] $\sum_{g=0}^{k} p_g = 1$

[2.7.3.9] $n(P_{MR}) = 2k - 1$ Anzahl der unabhängigen Modellparameter

[2.7.3.10] $\hat{p}_g = \frac{n_g}{n}$ für g = 0,...,k MML-Schätzer der Klassengrößen

[2.7.3.11] $\sigma(\hat{p}_g) = \sqrt{\frac{p_g(1-p_g)}{n}}$ Fehlerstreuung des MML-Schätzers [2.7.3.10]

2.7.4 Die gewichtete Maximum-Likelihood-Methode

[2.7.4.1] $$L\left(X \middle| x_{o1},\ldots,x_{ok}\right)=\frac{\prod_{v=1}^{n}\xi_v^{x_{vo}}}{\prod_{q=0}^{n}\gamma_q(\xi)^{n_q}}$$ Bedingte Likelihood der Antwortmatrix bei gegebenen x_{oi}

[2.7.4.2] $$x_{vo}=\xi_v\sum_{q=1}^{n}n_q\frac{\gamma_{q-1}^{(v)}(\xi)}{\gamma_q(\xi)}$$ für v = 1,...,n CML-Schätzer der θ_v

[2.7.4.3] $$\sigma(\hat{\theta}_v)=\sqrt{\frac{1}{I(\theta_v)}}$$ Asymptotische Fehlerstreuung des CML-Schätzers [2.7.4.2]

[2.7.4.4] $$I(\theta_v)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\xi_v\varepsilon_i}{(1+\xi_v\varepsilon_i)^2}$$ Informationsfunktion der Personenparameter

[2.7.4.5] $$x_{vo}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\xi_v\varepsilon_i}{1+\xi_v\varepsilon_i}$$ UML-Schätzer der θ_v

[2.7.4.6] $$x_{vo}+\frac{\sum_{i=1}^{k}p_{vi}(1-p_{vi})(1-2p_{vi})}{2\sum_{i=1}^{k}p_{vi}(1-p_{vi})}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\xi_v\varepsilon_i}{1+\xi_v\varepsilon_i}$$ WML-Schätzer der θ_v

[2.7.4.7] $$g(\theta_v)=\sqrt{I(\theta_v)}$$ Wahrscheinlichkeitsdichte der latenten Personenvariable

[2.7.4.8] $$\mathrm{prob}(B|A)=\mathrm{prob}(A|B)\frac{\mathrm{prob}(B)}{\mathrm{prob}(A)}$$ Bayes-Theorem

[2.7.4.9] $$L(\theta_v|x_v)=L(x_v|\theta_v)\frac{L(\theta_v)}{L(x_v)}$$ Likelihood des Personenparameters bei gegebenem Antwortvektor

[2.7.4.10] $$L(x_v|\theta_v)=\frac{\xi_v^{x_{vo}}\prod_{i=1}^{k}\varepsilon_i^{x_{vi}}}{\prod_{i=1}^{k}(1+\xi_v\varepsilon_i)}$$

[2.7.4.11] $$L(\theta_v|x_v)=\frac{\xi_v^{x_{vo}}}{\prod_{i=1}^{k}(1+\xi_v\varepsilon_i)}g(\theta_v)\frac{\prod_{i=1}^{k}\varepsilon_i^{x_{vi}}}{\mathrm{prob}(x_v)}$$

[2.7.4.12] $$L(\theta_v|x_v)\approx\frac{\xi_v^{x_{vo}}}{\prod_{i=1}^{k}(1+\xi_v\varepsilon_i)}\,g(\theta_v)$$

[2.7.4.13] $$\ln\{L(\theta_v|x_v)\}\approx x_{vo}\theta_v-\sum_{i=1}^{k}\ln(1+\xi_v\varepsilon_i)+\ln\{g(\theta_v)\}$$

[2.7.4.14] $x_{vo} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\xi_v \varepsilon_i}{1+\xi_v \varepsilon_i} + \frac{d \ln\{g(\theta_v)\}}{d\theta_v} = 0$ Ableitung von [2.7.4.13] nach θ_v

[2.7.4.15] $g(\theta_v) = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\xi_v \varepsilon_i}{(1+\xi_v \varepsilon_i)^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ Wahrscheinlichkeitsdichte der latenten Personenvariable

[2.7.4.16] $\ln\{g(\theta_v)\} = \frac{1}{2} \ln\left(\sum_{i=1}^{k} \xi_v \varepsilon_i (1+\xi_v \varepsilon_i)^{-2} \right)$ Logarithmus der Wahrscheinlichkeitsdichte $g(\theta_v)$

[2.7.4.17] $\frac{d \ln\{g(\theta_v)\}}{d\theta_v} = \frac{\sum_{i=1}^{k} p_{vi}(1-p_{vi})(1-2p_{vi})}{2\sum_{i=1}^{k} p_{vi}(1-p_{vi})}$ Ableitung der Wahrscheinlichkeitsdichte $g(\theta_v)$ nach θ_v

2.8 Modellkontrolle und Beurteilung der Testleistung der Probanden im Rasch-Modell

2.8.1 Eigenschaften des Rasch-Modells

[2.8.1.1] $f_i(\theta_v) = \frac{\xi_v \varepsilon_i}{1+\xi_v \varepsilon_i}$ mit $\xi_v = e^{\theta_v}$ und $\varepsilon_i = e^{-\delta_i}$ Rasch-Modell

[2.8.1.2] $\text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})\} = \prod_{i=1}^{k} \text{prob}(x_{vi})$ Lokale Unabhängigkeit

[2.8.1.3] $\text{prob}\{(x_{v1},\ldots,x_{vk}) | x_{vo} = g\} = \frac{\prod_{i=1}^{k} \varepsilon_i^{x_{vi}}}{\gamma_g(\varepsilon)}$ Separierung der Modellparameter

[2.8.1.4] $\text{prob}\{(x_{1i},\ldots,x_{ni}) | x_{oi} = q\} = \frac{\prod_{v=1}^{n} \xi_v^{x_{vi}}}{\gamma_q(\xi)}$ Separierung der Modellparameter

2.8.2 Kontrolle der spezifischen Objektivität

[2.8.2.1] $\delta_i^{[1]} = \delta_i^{[2]} = \ldots = \delta_i^{[h]} = \delta_i^{[G]}$ Stichprobenunabhängigkeit der Itemparameter

[2.8.2.2] $L_0 = cL\left(X \middle| \delta_1^{(G)},\ldots,\delta_k^{(G)}\right)$

[2.8.2.3] $L_1 = \prod_{g=1}^{h} cL\left(X^{(g)} \middle| \delta_1^{(g)},\ldots,\delta_k^{(g)}\right)$

[2.8.2.4] $\lambda = \frac{L_0}{L_1}$ Likelihood-Quotient

[2.8.2.5] $df = (h-1)(k-1)$ Freiheitsgrade der Prüfgröße [2.8.2.6]

[2.8.2.6] $-2\ln(\lambda) = 2|\ln(L_0) - \ln(L_1)|$ Likelihood-Quotienten-Test

[2.8.2.7] $$g = \begin{cases} 1 \text{ für } x_{vo} \leq Md \text{ ("Low-Score-Gruppe")} \\ 2 \text{ für } x_{vo} > Md \text{ ("High-Score-Gruppe")} \end{cases}$$ Mediansplit

[2.8.2.8] $$x_{gi} = \sum_{v:x_{vo}=g} x_{vi}$$ Lösungshäufigkeiten innerhalb der Scoregruppen

[2.8.2.9] $$e_{gi} = n_g \, \text{prob}(x_{vi} = 1 | x_{vo} = g)$$ Erwartete Lösungshäufigkeiten innerhalb der Scoregruppen

[2.8.2.10] $$\text{prob}(x_{vi} = 1 | x_{vo} = g) = \frac{\varepsilon_i \, \gamma_{g-1}^{(i)}(\varepsilon)}{\gamma_g(\varepsilon)}$$

[2.8.2.11] $$df = (k-2)(k-1)$$ Freiheitsgrade der Prüfgröße [2.8.2.12]

[2.8.2.12] $$\chi_o^2 = \sum_{g=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_{gi} - e_{gi})^2}{e_{gi}}$$ Test der Reproduzierbarkeit der Lösungshäufigkeiten

[2.8.2.13] $$e_{gi}^{(q)} = x_{gi} \frac{n_g^{(q)}}{n_g}$$ Erwartete Lösungshäufigkeiten in Teilstichprobe g

[2.8.2.14] $$df_g = (h-1)(k-1)$$ Freiheitsgrade der Prüfgröße [2.8.2.15]

[2.8.2.15] $$\chi_g^2 = \sum_{q=1}^{h} \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_{gi}^{(q)} - e_{gi}^{(q)})^2}{e_{gi}^{(q)}}$$ Prüfgröße für Teilstichprobe g

[2.8.2.16] $$\chi_o^2 = \sum_{g=1}^{k-1} \chi_g^2$$ Zusammenfassung der χ_g^2

[2.8.2.17] $$df_o = \sum_{g=1}^{k-1} df_g = (h-1)(k-1)^2$$ Freiheitsgrade der Prüfgröße [2.8.2.16]

[2.8.2.18] $$df = (h-1)(k-1)$$ Freiheitsgrade der Prüfgröße [2.8.2.19]

[2.8.2.19] $$\chi_o^2 = \sum_{q=1}^{h} \sum_{i=1}^{k} \frac{(x_{oi}^{(q)} - e_{oi}^{(q)})^2}{e_{oi}^{(q)}}$$ Aus aggregierten Daten berechnete Prüfgröße

[2.8.2.20] $$x_{oi}^{(q)} = \sum_{g=1}^{k-1} x_{gi}^{(q)}$$ Datenaggregation

[2.8.2.21] $$e_{oi}^{(q)} = \sum_{g=1}^{k-1} e_{gi}^{(q)}$$ Erwartete Häufigkeiten

2.8.3 Kontrolle der lokalen Unabhängigkeit

[2.8.3.1] $$cL(X) = \frac{\prod_{i=1}^{k} \prod_{r=0}^{i-1} (\sigma_i - \psi_r)^{n_{ri}}}{\prod_{g=1}^{k-1} G(g, \psi, \sigma)^{n_g}}$$ Bedingte Likelihood der Antwortmatrix im dynamischen Testmodell

[2.8.3.2] $n_{ri} = \sum_{v=1}^{n} z_{vir}(1 - x_{vi})$ Bedingte Antworthäufigkeiten

[2.8.3.3] $\text{prob}\left(x_{vi} = 0 \middle| x_{vo} = g, x_{vo}^{(i)} = r\right) = \frac{\gamma_r^{(j\geq i)}(\varepsilon)\gamma_{g-r}^{(j\leq i)}(\varepsilon)}{\gamma_g(\varepsilon)}$ Bei Geltung des Rasch-Modells

[2.8.3.4] $e_{ri} = \sum_{g=r}^{k-i+r} n_g \frac{\gamma_r^{(j\geq i)}(\varepsilon)\gamma_{g-r}^{(j\leq i)}(\varepsilon)}{\gamma_g(\varepsilon)}$ Erwartete Häufigkeiten

[2.8.3.5] $e_{oi} = \sum_{r=0}^{i-1} e_{ri} = n - x_{oi}$ Erwartete Spaltensummen der bedingten Antwortmatrix

[2.8.3.6] $e_{ro} = \sum_{i=r+1}^{k} e_{ri}$ Erwartete Zeilensummen der bedingten Antwortmatrix

[2.8.3.7] $\omega_1^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{r=0}^{i-1} \frac{(n_{ri} - e_{ri})^2}{e_{ri}}$ Test der bedingten Antworthäufigkeiten

[2.8.3.8] $\omega_2^2 = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{(n_{ro} - e_{ro})^2}{e_{ro}}$ Test der Zeilensummen der bedingten Antwortmatrix

2.8.4 Beurteilung der Testleistungen

[2.8.4.1] $\text{KONF}_\gamma \left\{\hat{\theta}_v - c\,\sigma(\hat{\theta}_v) \leq \theta_v \leq \hat{\theta}_v + c\,\sigma(\hat{\theta}_v)\right\}$ Konfidenzintervall für den Personenparameter

[2.8.4.2] $z = \frac{\hat{\theta}_v - \theta_{krit}}{\sigma(\hat{\theta}_v)}$ Test für den Personenparameter

[2.8.4.3] $z = \frac{\hat{\theta}_v - \hat{\theta}_w}{\sqrt{\sigma^2(\hat{\theta}_v) + \sigma^2(\hat{\theta}_w)}}$ Kritische Differenz zweier Vpn

[2.8.4.4] $p = \text{prob}\left\{(1{,}0) \middle| x_{oi} = 1\right\} = \frac{\xi_v}{\xi_v + \xi_w}$ Test von McNemar

2.9 Verallgemeinerungen des Rasch-Modells

2.9.1 Mehrfaktorielle Rasch-Modelle

[2.9.1.1] $\text{prob}(X_{vij} = x) = \frac{\xi_v \varepsilon_i \beta_j}{x!} e^{-\xi_v \varepsilon_i \beta_j}$ mit x = 0,1,2... Mehrfaktorielles Poisson-Modell

[2.9.1.2] $\text{prob}(X_{vij} = x) = \frac{(\xi_v \varepsilon_i \beta_j)^x}{1 + \xi_v \varepsilon_i \beta_j}$ mit x = 0,1 Mehrfaktorielles dichotomes RM

[2.9.1.3]	$\text{prob}\left(X_{vij}=x\right)=\dfrac{\xi_{vx}\varepsilon_{ix}\beta_{jx}}{\sum_{y=0}^{m-1}\xi_{vy}\varepsilon_{iy}\beta_{jy}}$	mit = 0,...,m-1	Mehrfaktorielles polytomes RM
[2.9.1.4]	$\beta_j=\left(\beta_{j0},\ldots,\beta_{jm-1}\right)$		Im polytomen Modell
[2.9.1.5]	$g_{ab}^{(j)}=\begin{cases}1 & \text{falls Stufe b des Faktors a realisiert ist}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$		
[2.9.1.6]	$\ln\left(\beta_j\right)=\sum_{a=1}^{z}\sum_{b=0}^{c_a-1}g_{ab}^{(j)}\,\omega_b^{(a)}$		Im dichotomen Modell
[2.9.1.7]	$\ln\left(\beta_{jx}\right)=\sum_{a=1}^{z}\sum_{b=0}^{c_a-1}g_{ab}^{(j)}\,\omega_{bx}^{(a)}$		Im polytomen Modell
[2.9.1.8]	$\overline{\omega}_b^{(a)}=\dfrac{1}{c'}\sum_{b'=0}^{c'-1}\omega_{b,b'}^{(a,a')}$	für b = 0,...,c-1	Mittlere Haupteffekte des Faktors a
[2.9.1.9]	$\overline{\omega}_{b'}^{(a')}=\dfrac{1}{c}\sum_{b=0}^{c-1}\omega_{b,b'}^{(a,a')}$	für b’ = 0,...,c’-1	Mittlere Haupteffekte des Faktors a’
[2.9.1.10]	$\kappa_{b,b'}^{(a,a')}=\omega_{b,b'}^{(a,a')}-\left(\overline{\omega}_b^{(a)}+\overline{\omega}_{b'}^{(a')}\right)$		Wechselwirkung der Faktoren a und a’
[2.9.1.11]	$\omega_{b,b'}^{(a,a')}=\overline{\omega}_b^{(a)}+\overline{\omega}_{b'}^{(a')}+\kappa_{b,b'}^{(a,a')}$		Gemeinsamer Effekt der Faktoren a und a’
[2.9.1.12]	$\omega_{b,b'}^{(a,a')}=\omega_b^{(a)}+\omega_{b'}^{(a')}+\kappa_{b,b'}^{(a,a')}$		Gemeinsamer Effekt der Faktoren a und a’
[2.9.1.13]	$\kappa_{b,b'}^{(a,a')}=\omega_{b,b'}^{(a,a')}-\left(\omega_b^{(a)}+\omega_{b'}^{(a')}\right)$		Wechselwirkung der Faktoren a und a’

2.9.2 Das lineare logistische Testmodell

[2.9.2.1]	$\ln\left(\varepsilon_i\right)=\sum_{j=1}^{m}q_{ij}\eta_j+c$	Lineares logistisches Testmodell
[2.9.2.2]	$R\left(Q\right)=m$	Erforderlicher Rang der Designmatrix Q
[2.9.2.3]	$\sum_{i=1}^{k}x_{oi}q_{ij}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{g=1}^{k}n_g\dfrac{\gamma_{g-1}^{(i)}\left(\varepsilon\right)\varepsilon_i}{\gamma_g\left(\varepsilon\right)}q_{ij}$	CML-Schätzgleichung für die Basisparameter η_j
[2.9.2.4]	$L_0=cL\left(X\middle|Q\right)$	Bedingte Likelihood unter H_0
[2.9.2.5]	$L_1=cL\left(X\middle|E\right)$	Bedingte Likelihood unter H_1
[2.9.2.6]	$df=k-R\left(Q_*\right)$	Freiheitsgrade der Prüfgröße [2.9.2.7]
[2.9.2.7]	$-2\ln\left(\lambda\right)=2\left\|\ln\left(L_0\right)-\ln\left(L_1\right)\right\|$	Bedingter Likelihood-Quotienten Test

[2.9.2.8] $R(Q_*) = m + 1$ Rang von Q_*, falls die η_j auf einer Absolutskala gemessen werden

[2.9.2.9] $df = k - m - 1$ Freiheitsgrade der Prüfgröße [2.9.2.7], falls [2.9.2.8] gilt

[2.9.2.10] $R(Q_*) = R(Q) = m$ Rang von Q_*, falls die η_j auf einer Differenzenskala gemessen werden

[2.9.2.11] $df = k - m$ Freiheitsgrade der Prüfgröße [2.9.2.7], falls [2.9.2.10] gilt

2.9.4 Hypothesentestung

[2.9.4.1] $L_0 = cL(X|Q_0)$

[2.9.4.2] $L_1 = cL(X|Q)$

[2.9.4.3] $df = m - m_0$ Freiheitsgrade der Prüfgröße [2.9.4.4]

[2.9.4.4] $-2\ln(\lambda) = 2|\ln(L_0) - \ln(L_1)|$ Likelihood-Quotienten-Test

2.9.5 Degenerierte Modellvarianten

[2.9.5.1] $$f_i(\theta_v) = p_i + (1 - p_i)\frac{\exp(\theta_v - \delta_i)}{1 + \exp(\theta_v - \delta_i)}$$ Modell von Keats (1974)

[2.9.5.2] $$f_{i.r}(\theta_v) = \frac{\exp(\theta_v - \delta_i + \beta_{ir})}{1 + \exp(\theta_v - \delta_i + \beta_{ir})}$$ Modell von Verhelst & Glas (1993)

[2.9.5.3] $$f_{1.r}(\theta_v) = prob\left(X_{vi} = 1 \middle| x_{vo}^{(i)} = r\right) = prob\left(x_{vi} = 1 \middle| j = [i.r]\right)$$ Äquivalenz der beiden Darstellungsweisen für bedingte Itemcharakteristiken

2.9.6 Grenzfälle des Rasch-Modells

[2.9.6.1] $$f_i(\theta_v) = \frac{\exp(\alpha_i(\theta_v - \delta_i))}{1 + \exp(\alpha_i(\theta_v - \delta_i))}$$ Birnbaum-Modell

[2.9.6.2] $$prob\{(x_{v1}, \ldots, x_{vk}) | x_{v\bullet} = g\} = \frac{\prod_{i=1}^{k} \varepsilon_i^{\alpha_i x_{vi}}}{\sum_{y_v : y_{v\bullet} = g} \prod_{i=1}^{k} \varepsilon_i^{\alpha_i y_{vi}}}$$ Suffizienz des gewichteten Summenscores

[2.9.6.3] $$cL(X) = \frac{\prod_{i=1}^{k} \varepsilon_i^{\alpha_i x_{oi}}}{\prod_g \left(\sum_{y_v : y_{v\bullet} = g} \prod_{i=1}^{k} \varepsilon_i^{\alpha_i y_{vi}} \right)^{n_g}}$$ Bedingte Likelihood der Antwortmatrix

2.9.7 Mischverteilungs-Rasch-Modelle

[2.9.7.1] $f_{ig}(\theta_v) = \dfrac{\exp(\theta_v - \delta_{ig})}{1 + \exp(\theta_v - \delta_{ig})}$ Klassenspezifische Itemcharakteristik

[2.9.7.2] $\text{prob}(X_{vi} = 1) = \sum_{g=1}^{h} p_g \dfrac{\exp(\theta_v - \delta_{ig})}{1 + \exp(\theta_v - \delta_{ig})}$ Lösungswahrscheinlichkeit einer zufälligen Vp

[2.9.7.3] $p_g = \text{prob}(v \in g)$ Klassengröße

2.10 Identifikation der Klassenanzahl, Parameterschätzung und Beurteilung der Testleistung der Probanden in der Latent-Class-Analyse

2.10.1 Beurteilung der Testleistung

[2.10.1.1] $z_{vix} = \begin{cases} 1 & \text{wenn Vp } v \text{ Item i in Kategorie } x \text{ beantwortet} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

[2.10.1.2] $mL(X) = \prod_{v=1}^{n} \left(\sum_{g=1}^{h} p_g \prod_{i=1}^{k} \prod_{x=0}^{m_i-1} p_{gix}^{z_{vix}} \right)$ Marginale Likelihood der Antwortmatrix

[2.10.1.3] $p_{g.x_v} = \text{prob}\{v \in g | (x_{v1}, \ldots, x_{vk})\} = \dfrac{p_g \prod_{i=1}^{k} \prod_{x=0}^{m_i-1} p_{gix}^{z_{vix}}}{\sum_{d=1}^{h} p_d \prod_{i=1}^{k} \prod_{x=0}^{m_i-1} p_{dix}^{z_{vix}}}$ Membership-Wahrscheinlichkeit

2.10.2 Parameterschätzung

[2.10.2.1] $\hat{p}_g = \dfrac{n_g}{n}$ Manifeste Klassen: ML-Schätzer für p_g

[2.10.2.2] $\hat{p}_{gix} = \dfrac{n_{gix}}{n_g}$ Manifste Klassen: ML-Schätzer für p_{gix}

[2.10.2.3] $\sigma(\hat{p}_g) = \sqrt{\dfrac{p_g(1 - p_g)}{n}}$ Fehlerstreuung des ML-Schätzers [2.10.2.1]

[2.10.2.4] $\sigma(\hat{p}_{gix}) = \sqrt{\dfrac{p_{gix}(1 - p_{gix})}{n_g}}$ Fehlerstreuung des ML-Schätzers [2.10.2.2]

[2.10.2.5] $e_g = \sum_{v=1}^{n} p_{g.x_v}$ Latente Klassen: Erwartungswert der Häufigkeit n_g

[2.10.2.6] $e_{gix} = \sum_{v:x_{vi}=x} p_{g.x_v}$ Latente Klassen: Erwartungswert der Häufigkeit n_{gix}

[2.10.2.7] $\hat{p}_g = \frac{e_g}{n}$ Latente Klassen: ML-Schätzer für p_g

[2.10.2.8] $\hat{p}_{gix} = \frac{e_{gix}}{e_g}$ Latente Klassen: ML-Schätzer für p_{gix}

[2.10.2.9] $\ln\{mL(X)\} = \sum_{v=1}^{n} \ln\left\{\sum_{g=1}^{h} p_g \prod_{i=1}^{k} \prod_{x=0}^{m_i-1} p_{gix}^{z_{vix}}\right\}$ Log-Likelihood

[2.10.2.10] $\sum_{g=1}^{h} p_g = 1$

[2.10.2.11] $\sum_{x=0}^{m_i-1} p_{gix} = 1$

[2.10.2.12] $n(P_{LCh}) = h - 1 + h\sum_{i=1}^{k}(m_i - 1)$ Unabhängige Modellparameter des LCA-Modells

[2.10.2.13] $n(P_{sat}) = \prod_{i=1}^{k} m_i - 1$ Unabhängige Modellparameter des saturierten Modells

[2.10.2.14] $df = n(P_{sat}) - n(P_{LCh})$ Freiheitsgrade des LCA-Modells

2.10.3 Identifikation der Klassenanzahl

[2.10.3.1] $AIC = 2\left|\ln\{mL(X)\}\right| + 2\,n(P_{LCh})$

[2.10.3.2] $BIC = 2\left|\ln\{mL(X)\}\right| + \ln(n)\; n(P_{LCh})$

[2.10.3.3] $CIC = 2\left|\ln\{mL(X)\}\right| + \ln\{\ln(n)\}\; n(P_{LCh})$

2.10.4 Modellvoraussetzungen

[2.10.4.1] $prob(x_v) = prob\{(x_{v1},\ldots,x_{vk})\} = \sum_{g=1}^{h} p_g \prod_{i=1}^{k} \prod_{x=0}^{m_i-1} p_{gix}^{z_{vix}}$

[2.10.4.2] $J = \frac{\partial\, prob(x_v)}{\partial p_u}$ Jacoby-Matrix

2.10.5 Weiterverrechnung der LCA-Ergebnisse

[2.10.5.1] $$y_{vg} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } p_{g.x_v} \text{ maximal ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

[2.10.5.2] $$q_v = \prod_{g=1}^{h} g^{y_{vg}}$$ Klassenscores

[2.10.5.3] $$n_{ab} = \sum_{v: y_v = a} p_{b.x_v}$$ Bivariate Häufigkeiten

2.11 Modellvergleiche

[2.11.1] $$df = n(P_1) - n(P_0)$$ Freiheitsgrade der Prüfgröße [2.11.2]

[2.11.2] $$-2\ln(\lambda) = 2\left|\ln(L_0) - \ln(L_1)\right|$$ Likelihood-Quotienten-Test

[2.11.3] $$df = \prod_{i=1}^{k} m_i - n(P) - 1$$ Freiheitsgrade der Prüfgröße [2.11.4]

[2.11.4] $$\chi^2 = \sum_{x_v} \frac{\left(n(x_v) - e(x_v)\right)^2}{e(x_v)}$$ Test der Reproduzierbarkeit der Patternhäufigkeiten

2.12 Validität

2.12.1 Augenscheinvalidität, theoretische Validität und Kriteriumsvalidität

[2.12.1.1] $$\rho(X_{ot}, Y_{ot'}) = \rho(X_{oo}, Y_{ot'})\sqrt{\frac{n}{1 + (n-1)\,\rho^2_{XT_o}}}$$ Erwartete Validität bei n-facher Testlänge

[2.12.1.2] $$\sigma(X_{ot}, Y_{ot'}) = \sigma(X_{o1}, Y_{ot'}) + \sigma(X_{o2}, Y_{ot'})$$

[2.12.1.3] $$\rho(X_{ot}, Y_{ot'}) = \frac{\sigma(X_{o1}, Y_{ot'}) + \sigma(X_{o2}, Y_{ot'})}{\sigma(X_{ot})\,\sigma(Y_{ot'})}$$

[2.12.1.4] $$\sigma(X_{ot}) = \sqrt{2\sigma^2(X_{oo})(1 + \rho^2_{XT_o})}$$ Für (essentiell) parallele Teiltests

[2.12.1.5] $$\left|\rho(X_{ot}, Y_{ot'})\right| \le \left|\rho(T_{ot}, T_{ot'})\right| \rho(Y_{ot'}, T_{ot'})$$ Obergrenze der erzielbaren Validität

[2.12.1.6] $$\rho(T_{ot}, T_{ot'}) = \frac{\rho(X_{ot}, Y_{ot'})}{\sqrt{\rho^2_{XT}\rho^2_{YT'}}}$$ Verdünnungsformel

[2.12.1.7] $$\rho(X_{ot}, Y_{ot'}) = \rho(T_{ot}, T_{ot'})\sqrt{\rho^2_{XT}\rho^2_{YT'}}$$ Rückrechnung der tatsächlichen Korrelation

2.12.2 Konstruktvalidität

[2.12.2.1]	$\rho_{12} = \rho(X_{o1}, X_{o2}) = \sigma(X_{o1}, X_{o2}) = E(X_{o1}X_{o2})$	Für standardisierte Variablen
[2.12.2.2]	$\rho_{tt} = \rho(X_{ot}, X_{ot}) = \sigma(X_{ot}, X_{ot}) = \sigma^2(X_{ot}) = E(X_{ot}^2) = 1$	Für standardisierte Variablen
[2.12.2.3]	$\rho_{12} = h_1 h_2 \cos\varphi_{12}$	mit $h_t = \sqrt{a_{t1}^2 + a_{t2}^2}$
[2.12.2.4]	$\rho_{12} = \cos\varphi_{12}$	wegen $\rho_{tt} = h_t^2 = 1$
[2.12.2.5]	$X_{ot} = a_{t1}Y_{o1} + \ldots + a_{tj}Y_{oj} + \ldots + a_{tq}Y_{tq}$	Grundgleichung der Hauptkomponentenanalyse
[2.12.2.6]	$a_{tj} = \rho(X_{ot}, Y_{oj})$	Ladung der Variablen auf den Hauptkomponenten
[2.12.2.7]	$X' = AY'$	Matrixschreibweise der Grundgleichungen
[2.12.2.8]	$Q = AA'$	Gleichungssystem zur Berechnung der Ladungsmatrix A
[2.12.2.9]	$q = \text{Rang}(Q) \leq n$	Anzahl der Hauptkomponenten
[2.12.2.10]	$F' = A^{-1}X'$	Hauptkomponenten = Linearkombinationen der manifesten Variablen
[2.12.2.11]	$B = AT$	Orthogonale lineare Transformation der Ladungsmatrix A
[2.12.2.12]	$T = (A'A)^{-1}A'B$	Transformationsmatrix, die A und B ineinander überführt
[2.12.2.13]	$\text{Varianzanteil} = \frac{1}{n}\lambda_j$	
[2.12.2.14]	$\lambda_j = \sum_{t=1}^{n} a_{tj}^2$	
[2.12.2.15]	$X_{ot} = a_{t1}F_{o1} + \ldots + a_{tj}F_{oj} + \ldots + a_{tm}F_{tm}$	Grundgleichung der Faktorenanalyse
[2.12.2.16]	$m = q + n$	Anzahl der latenten Variablen (Faktoren)
[2.12.2.17]	$\overline{Q} = \overline{A}\,\overline{A}'$	Gleichungssystem zur Berechnung der reduzierten Ladungsmatrix $\overline{A}$
[2.12.2.18]	$h_t^2 = \sum_{j=1}^{q} a_{tj}^2$	Kommunalitäten